

GUJARAT TECHNOLOGICAL UNIVERSITY
Diploma Engineering – SEMESTER-II • Examination – SUMMER • 2016

Subject code:- 3320002

Date :- 07-05-16

Subject Name:- Advance Mathematics [Group-1]

Time:- 10:30 am - 01:00 pm

Total Marks:- 70

Instruction:-

1. Attempt all questions.
2. Make suitable assumptions wherever necessary.
3. Figures to the right indicate full marks.
4. Use of SIMPLE CALCULATOR is permissible. (Scientific/Higher Version not allowed)
5. English version is authentic.

Q.1 Fill in the blanks using appropriate choice from the given options.**(14)**

1. $\sqrt{-4} =$ _____
 (a) $2i$ (b) $-2i$ (c) $\pm 2i$ (d) none of the above
2. $z = 3i - 2$ then $\bar{z} =$ _____
 (a) $3i + 2$ (b) $-2 - 3i$ (c) $2 - 3i$ (d) $-2 + 3i$
3. Inverse of Complex Number $5-4i$ is _____
 (a) $\frac{-5-4i}{9}$ (b) $\frac{5+4i}{41}$ (c) $\frac{5-4i}{41}$ (d) $\frac{-5+4i}{41}$
4. $|(3-4i)^2| =$ _____
 (a) 25 (b) 24 (c) 5 (d) 12
5. If $f(x) = \log(\tan x)$ then $f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ _____
 (a) 1 (b) e (c) 0 (d) π
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$ _____
 (a) e (b) 0 (c) 1 (d) -1
7. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) =$ _____
 (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (d) $x^{3/2}$
8. If $f(x) = \sin x$ then $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____
 (a) 0 (b) 1 (c) $\cos x$ (d) $\frac{1}{2}$
9. $\frac{d}{dx}(x^2 + 2^x + 2^2) =$ _____
 (a) $2^x \log 2 + 2^x$ (b) $2x + 2^x \log 2$ (c) $2x + 2^x \log 2 + 2$ (d) $2x + 2^2$
10. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) =$ _____
 (a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\int e - \log \sec x \, dx =$ _____
 (a) $\sec x \tan x$ (b) $\cos x$ (c) $\sin x$ (d) $\tan x$
12. $\int_1^e \log x \, dx =$ _____

- (a) 0 (b) e (c) 1 (d) e - 1

13. The order and degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9y = 0$ are ____ and ____ respectively.
 (a) 2, 3 (b) 3, 2 (c) 1, 2 (d) 2, 1

14. Integrality factor of the equation $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ is _____
 (a) $\tan x$ (b) $\sin x$ (c) $\cos x$ (d) e^x

Q.2 (a) Attempt any two (6)

- Express $\frac{4+2i}{(3+2i)(5-3i)}$ in a+ib form a,b ∈ R
- If $z = -3 + \sqrt{2}i$ then find the value of $z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 7z + 4$
- Find the square root of 5-2i

(b) Attempt any two (8)

- If $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ then prove that
 (a) $f(x) \cdot f(-x) = 1$ (b) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- Evaluate $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{3x^3 + 5x^2 + x - 1}$
- Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{2x^4 + 3x - 1}$

Q.3(a) Attempt any two (6)

- If $Y = e^x \sin x$ then find $\frac{dy}{dx}$
- If $y = \log \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ then find $\frac{dy}{dx}$
- If $x^3 + y^3 = 3axy$ then find $\frac{dy}{dx}$

(b) Attempt any two (8)

- If $y = a \cos(pt) + b \sin(pt)$ then prove that $\frac{d^3y}{dt^3} + p^2y = 0$
- If the equation of motion of a particle is $S = t^3 + 3t$ ($t > 0$) then
 1) Find the velocity and acceleration at $t=3$
 2) When the velocity and acceleration become equal.
- Find the maximum and minimum value of the equation $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

Q.4(a) Attempt any two (6)

- Integrate $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$
- Integrate $\int \frac{x^2 + 4x - 1}{x^3 - x} dx$
- Integrate $\int x^2 e^{mx} dx$

(b) Attempt any two (8)

- Integrate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$
- Find the area bounded by the curve $Y = 2x^2$; $x=1$, $x=2$, and x axis

(3) Integrate $\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$

Q.5 (a) Attempt any two

(6)

(1) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3}$

(2) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

(3) Solve $x \frac{dy}{dx} - y = x^2$

(b) Attempt any two

(8)

(1) Solve $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1} y = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

(2) Solve $x(1+y^2) dx - y(1+x^2) dy = 0$

(3) Solve $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \cos x$

ગુજરાતી અનુવાદ

સુચના:

૧. દરેક પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.
૨. જ્યાં જરૂરી હોય ત્યાં યોગ્ય ધારણા કરો.
૩. જમણી બાજુના આંકડા સંપૂર્ણ ગુણ સૂચવે છે.
૪. સરળ કેલ્ક્યુલેટરના ઉપયોગની પરવાનગી છે. (વૈજ્ઞાનિક / ઉચ્ચ આવૃત્તિની પરવાનગી નથી)
૫. અંગ્રેજી ભાષાંતર મૂળભુત આધાર છે.

પ્ર.૧ યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

(૧૪)

૧ $\sqrt{-4} =$ _____

- (a) $2i$ (b) $-2i$ (c) $\pm 2i$ (d) એકપણ નહિ

૨ $z = 3i - 2$ તો $\bar{z} =$ _____

- (a) $3i + 2$ (b) $-2 - 3i$ (c) $2 - 3i$ (d) $-2 + 3i$

૩ સંકર સંખ્યા $5-4i$ નો વ્યસ્ત _____ છે.

- (a) $\frac{-5-4i}{9}$ (b) $\frac{5+4i}{41}$ (c) $\frac{5-4i}{41}$ (d) $\frac{-5+4i}{41}$

૪ $|(3-4i)^2| =$ _____

- (a) 25 (b) 24 (c) 5 (d) 12

૫ જો $f(x) = \log(\tan x)$ તો $f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ _____

- (a) 1 (b) e (c) 0 (d) π

૬ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$ _____

(a) e (b) 0 (c) 1 (d) -1

9 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (d) $x^{3/2}$

10 જો $f(x) = \sin x$ તો $f'(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) 0 (b) 1 (c) $\cos x$ (d) $\frac{1}{2}$

11 $\frac{d}{dx}(x^2 + 2^x + 2^2) = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) $2^x \log 2 + 2^x$ (b) $2x + 2^x \log 2$ (c) $2x + 2^x \log 2 + 2$ (d) $2x + 2^2$

12 $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

13 $\int e - \log \sec x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) $\sec x \tan x$ (b) $\cos x$ (c) $\sin x$ (d) $\tan x$

14 $\int_1^e \log x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(a) 0 (b) e (c) 1 (d) $e - 1$

15 વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9y = 0$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે $\underline{\hspace{2cm}}$ અને $\underline{\hspace{2cm}}$ છે.

(a) 2, 3 (b) 3, 2 (c) 1, 2 (d) 2, 1

16 વિકલસમીકરણ $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ $\underline{\hspace{2cm}}$ છે.

(a) $\tan x$ (b) $\sin x$ (c) $\cos x$ (d) e^x

પ્ર. ૨ (અ) ગમે તે બે ગણો.

(૬)

૧ $\frac{4+2i}{(3+2i)(5-3i)}$ ને $a+ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો. $a, b \in \mathbb{R}$

૨ જો $z = -3 + \sqrt{2}i$ તો $z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 7z + 4$ ની કિંમત શોધો.

૩ $5 - 2i$ નું વર્ગમૂળ શોધો.

(બ) ગમે તે બે ગણો.

(૮)

૧ જો $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ તો સાબિત કરો કે, (અ) $f(x) \cdot f(-x) = 1$ (બ) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

૨ કિંમત શોધો. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{3x^3 + 5x^2 + x - 1}$

૩ કિંમત શોધો. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{2x^4 + 3x - 1}$

પ્ર.૩ (અ) ગમે તે બે ગણો.

(૬)

૧. જો $Y = e^x \sin x$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

૨ જો $y = \log \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

૩ જો $x^3 + y^3 = 3axy$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

(બ) ગમે તે બે ગણો. (૮)

૧ જો $y = a \cos(pt) + b \sin(pt)$ તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = 0$

૨ પદાર્થની ગતિ નું સમીકરણ $S = t^3 + 3t$ ($t > 0$) હોય તો,

અ) $t=3$ આગળ વેગ, પ્રવેગ શોધો.

બ) વેગ અને પ્રવેગ ક્યારે સમાન થશે.

૩ વિધેય $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ની અધિકતમ અને ન્યુનતમ કિંમત શોધો.

પ્ર.૪ (અ) ગમે તે બે ગણો. (૬)

૧ સંકલન કરો. $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$

૨ સંકલન કરો. $\int \frac{x^3 + 4x - 1}{x^3 - x} dx$

૩ સંકલન કરો. $\int x^2 e^{mx} dx$

(બ) ગમે તે બે ગણો. (૮)

૧ કિંમત શોધો. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

૨ $Y = 2x^2$ નું x અક્ષ અને $x=1$, $x=2$, વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશ નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

૩ સંકલન કરો. $\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$

પ્ર.૫ (અ) ગમે તે બે ગણો. (૬)

૧ કિંમત શોધો $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3}$

૨ ઉકેલો $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

૩ ઉકેલો $x \frac{dy}{dx} - y = x^2$

(બ) ગમે તે બે ગણો. (૮)

૧ ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1} y = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

૨ ઉકેલો $x(1+y^2) dx - y(1+x^2) dy = 0$

૩ ઉકેલો $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \cos x$
