

Seat No.: _____

Enrolment No. _____

GUJARAT TECHNOLOGICAL UNIVERSITY
DIPLOMA ENGINEERING – SEMESTER – II • EXAMINATION – Winter- 2015

Subject Code: 3320002

Date: 28/12/2015

Subject Name: Advanced Mathematics (Group-1)

Time: 2:30PM TO 5:00PM

Total Marks: 70

Instructions:

1. Attempt ALL questions.
2. Make Suitable assumptions wherever necessary.
3. Figures to the right indicate full marks.
4. Use of SIMPLE CALCULATOR is permissible. (Scientific/Higher Version not allowed)
5. English version is authentic.

Q.1 Fill in the blanks using appropriate choice from the given options. **14**

- 1 If $z_1 = 3 - 2i$ and $z_2 = -2 + 2i$ then $|z_1 + z_2| = \dots\dots\dots$
(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) $\sqrt{5}$
- 2 If $|\bar{z}| = 16$, then $|z| = \dots\dots\dots$
(a) 16 (b) 4 (c) 256 (d) 1
- 3 $\sqrt{-9+0i} = \dots\dots\dots$
(a) -3 (b) 3 (c) $\mp 3i$ (d) ∓ 3
- 4 $\arg(35) = \dots\dots\dots$
(a) 0 (b) π (c) $\pi/2$ (d) $\pi/3$
- 5 If $f(x) = \log_x 1$ then $f(100) = \dots\dots\dots$
(a) 1 (b) 100 (c) x (d) 0
- 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \dots\dots\dots$
(a) 0 (b) $\sin x$ (c) x (d) 1
- 7 If $y = \sin^{99}(\pi/2)$, then $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
(a) 0 (b) 100 (c) 99 (d) 1
- 8 If $y = \cot x$, then $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
(a) $\operatorname{cosec}^2 x$ (b) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $\sec^2 x$ (d) $-\sec^2 x$
- 9 If $y = e^x$, then $\frac{d^2 y}{dx^2} = \dots\dots\dots$
(a) e^x (b) e^{2x} (c) e^{x^2} (d) e^{-x}
- 10 $\frac{d}{dx}(x^2 + 2^x + 2^2) = \dots\dots\dots$
(a) 1 (b) $2x + 2^x + 2^2$ (c) $2x + 2^x \log 2$ (d) 0

- 11 $\int \sin x dx = \dots\dots\dots + c$
 (a) $\cos x$ (b) $-\cos x$ (c) $\sin x$ (d) $-\sin x$
- 12 Area covered by the curve $x^2 + y^2 = 4$ is
 (a) 2π (b) 4π (c) 16π (d) 4
- 13 The order of a differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(3 + \frac{dy}{dx}\right)^3$ is
 (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 6
- 14 The integrating factor(I.F.) of $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = e^x$ is
 (a) $\frac{2}{x^2}$ (b) $\frac{2}{x^2}$ (c) x^2 (d) $2x$

Q.2 (a) Attempt any two **06**

- For $z = 1 + i$ find $|z|$ and $\arg(z)$.
- Find the square root of the complex number $z = 3 + 4i$.
- Simplify $\left(\frac{\cos 3\theta + i \sin 3\theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \right)^2$.

(b) Attempt any two **08**

- If $f(x) = \log x$, then prove that
 (i) $f(x) + f(y) = f(xy)$ and (ii) $f(x) - f(y) = f(x/y)$
- Find $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$.
- Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3}$.

Q.3 (a) Attempt any two **06**

- If $y = \log(e^{\sin x})$, then prove that $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$.
- Find $\frac{d}{dx} [x^3 \log x]$.
- Find $\frac{dy}{dx}$, where $y = x^x$.

(b) Attempt any two **08**

- For $x^3 + y^3 = 3xy$, find $\frac{dy}{dx}$.
- If $y = e^{2x}$ then prove that, $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$.
- The equation of a motion of a particle is $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t + 5$. Find the velocity at $t=0$ and acceleration at $t=1$.

Q.4 (a) Attempt any two **06**

1. Evaluate $\int \left(\frac{3x^2 + 2x - 5}{x} \right) dx$.

2. Evaluate $\int x \sin x dx$.

3. Evaluate $\int_1^3 (2x^2 + 5x + 1) dx$

(b) Attempt any two

08

1. Evaluate $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} dx$.

2. Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$.

3. Find the area of region bounded by the curves $y = x^2 - 4x + 1$ and $y = x - 3$.

Q.5 (a) Attempt any two

06

1. Evaluate $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 7n^2 + 5n - 1}{8n^3 + 7n^2 - 4n + 1}$.

2. Solve the differential equation $x \cdot dy + y \cdot dx = 0$.

3. Solve $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$.

(b) Attempt any two

08

1. Solve the differential equation $(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0$, where $xy < 1$.

2. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right)$.

3. Solve $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos x$.

સુચનાઓ:

1. દરેક પ્રશ્નોનો ઉત્તર આપો.
2. જ્યાં જરૂરી હોય તે યોગ્ય ધારણા કરો.
3. જમણી બાજુના આંકડા સંપૂર્ણ ગુણ સૂચવે છે.
4. સરળ કેલક્યુલેટર ઉપયોગ કરવાની પરવાનગી છે. (વૈજ્ઞાનિક /ઉચ્ચ આવૃત્તિની પરવાનગી નથી)
5. અંગ્રેજી ભાષાંતર મૂળભૂત આધાર છે.

Q.1 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

14

- 1 જો $z_1 = 3 - 2i$ અને $z_2 = -2 + 2i$ હોય, તો $|z_1 + z_2| = \dots\dots\dots$
(b) 0 (b) 1 (c) 5 (d) $\sqrt{5}$
- 2 જો $|\bar{z}| = 16$ હોય, તો $|z| = \dots\dots\dots$
(b) 16 (b) 4 (c) 256 (d) 1
- 3 $\sqrt{-9+0i} = \dots\dots\dots$
(b) -3 (b) 3 (c) $\mp 3i$ (d) ∓ 3
- 4 $\arg(35) = \dots\dots\dots$
(b) 0 (b) π (c) $\pi/2$ (d) $\pi/3$
- 5 જો $f(x) = \log_x 1$ હોય, તો $f(100) = \dots\dots\dots$
(b) 1 (b) 100 (c) x (d) 0
- 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \dots\dots\dots$
(b) 0 (b) $\sin x$ (c) x (d) 1
- 7 જો $y = \sin^{99}(\pi/2)$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
(a) 0 (b) 100 (c) 99 (d) 1
- 8 જો $y = \cot x$ હોય, તો $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
(a) $\operatorname{cosec}^2 x$ (b) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $\sec^2 x$ (d) $-\sec^2 x$
- 9 જો $y = e^x$ હોય, તો $\frac{d^2 y}{dx^2} = \dots\dots\dots$
(a) e^x (b) e^{2x} (c) e^{x^2} (d) e^{-x}
- 10 $\frac{d}{dx}(x^2 + 2^x + 2^2) = \dots\dots\dots$
(a) 1 (b) $2x + 2^x + 2^2$ (c) $2x + 2^x \log 2$ (d) 0
- 11 $\int \sin x dx = \dots\dots\dots + c$
(a) $\cos x$ (b) $-\cos x$ (c) $\sin x$ (d) $-\sin x$
- 12 વક્ર $x^2 + y^2 = 4$ દ્વારા ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\dots\dots\dots$ થાય.

- 13 (a) 2π (b) 4π (c) 16π (d) 4
 વિકલ્પ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(3 + \frac{dy}{dx}\right)^3$ ની કક્ષા છે.
- 14 (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 6
 વિકલ્પ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = e^x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.) છે.
- (a) $\frac{2}{x^2}$ (b) $\frac{2}{x^2}$ (c) x^2 (d) $2x$

Q.2 (a) કોઈ પણ બે ગણો. 06

1. $z = 1+i$ માટે $|\bar{z}|$ અને $\arg(z)$ મેળવો.
2. સંકર સંખ્યા $z = 3+4i$ નું વર્ગમૂળ શોધો
3. સાદુરૂપ આપો $\left(\frac{\cos 3\theta + i \sin 3\theta}{\cos \theta - i \sin \theta}\right)^2$.

(b) કોઈ પણ બે ગણો. 08

1. જો $f(x) = \log x$ હોય, તો સાબિત કરો કે
 (i) $f(x) + f(y) = f(xy)$ and (ii) $f(x) - f(y) = f(x/y)$
2. લક્ષ મેળવો $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$.
3. લક્ષ મેળવો $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3}$.

Q.3 (a) કોઈ પણ બે ગણો. 06

1. જો $y = \log(e^{\sin x})$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$.
2. $\frac{d}{dx}[x^3 \log x]$ મેળવો.
3. જો $y = x^x$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

(b) કોઈ પણ બે ગણો. 08

1. $x^3 + y^3 = 3xy$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.
2. જો $y = e^{2x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$.
3. એક કણનું ગતિ $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t + 5$ સુત્ર હોય, તો $t=0$ આગળ કણનો વેગ અને $t=1$ કણનો પ્રવેગ મેળવો.

Q.4 (a) કોઈ પણ બે ગણો. 06

1. મૂલ્ય શોધો $\int \left(\frac{3x^2 + 2x - 5}{x} \right) dx$.

2. મૂલ્ય શોધો $\int x \sin x dx$.

3. મૂલ્ય શોધો $\int_1^3 (2x^2 + 5x + 1) dx$

(b) કોઈ પણ બે ગણો.

08

1. મૂલ્ય શોધો $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} dx$.

2. સાબિત કરો કે $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$.

3. વક્રો $y = x^2 - 4x + 1$ અને $y = x - 3$ દ્વારા ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

Q.5 (a) કોઈ પણ બે ગણો.

06

1. મૂલ્ય શોધો $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 7n^2 + 5n - 1}{8n^3 + 7n^2 - 4n + 1}$.

2. વિકલ્પ સમીકરણ $x \cdot dy + y \cdot dx = 0$ નો ઉકેલ શોધો.

3. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ ઉકેલો.

(b) કોઈ પણ બે ગણો.

08

1. વિકલ્પ સમીકરણ $(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0$ નો ઉકેલ શોધો. જ્યાં $xy < 1$.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right)$ ઉકેલો.

3. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos x$ ઉકેલો.
